

2019年度 冬の陣 問題



数 学(理科)

(配点 120点)

令和2年2月8日 150分

注意・免責事項

- 1 問題は全部で6問が用意されています。
- 2 この問題冊子は全部で16ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答には必ず黒色鉛筆(または黒色シャープペンシル)を使用しなさい。
- 4 解答用紙の指定欄に、受験番号(表面2箇所、裏面1箇所)、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。
- 5 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 本試験問題は、いわゆる難関大学の前期入学試験問題(理系数学)の難易度、及び品質に概ね準じるよう一応の注意と努力を注いで作成されていますが、受験者本人の正確な学力を測るためのものではなく、また同時に受験者の学力向上を確約するものでもありません。
- 9 試験終了後、解答用紙と問題冊子は持ち帰りなさい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 1 問

一辺の長さが1である正五角錐の体積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 2 問

$0 < \theta < 2\pi$ の範囲における方程式

$$\sin 2\theta + \cos 2\theta = 0.82$$

の解のうち最も小さいものを φ とすると、 $\tan 2\varphi$ の値を求めよ。さらにすべての解を φ を用いて表し、解の総和を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 3 問

a, b は正の実数とする。関数 $f(x) = \frac{1}{a + e^{-bx}}$ について以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値を与える点の座標 (p, q) を求め、関数 $y = f(x)$ が直線 $x = p$ に関して対称であることを示せ。

(2) t を任意の実数とする。点 $A(t, f(t))$ 、 $B(t + 1, f(t + 1))$ 、 $C(t + 1, 0)$ 、 $D(t, 0)$ で定まる台形 $ABCD$ の面積を S_1 とし、 $S_2 = \int_t^{t+1} f(x) dx$ とするとき、 $S_1 = S_2$ を満たす t をすべて求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 4 問

(1) n を正の整数とすると、恒等式

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{2} a_n - b_n$$

を満たす整数の組 (a_n, b_n) を n を用いて表せ。

(2) 直線 $y = \sqrt{2}x$ にいくらでも近い格子点を与えられることを示せ。ここで格子点とは、 x 座標と y 座標の値がともに整数であるような座標平面上の点をいう。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 5 問

$a > 1$ とする。曲線 $C_1: y = \log_a x$ と曲線 $C_2: y = \log_x a$ の2つの交点をA、Bとする。曲線 C_1 と線分ABによって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とすると、極限值

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a}$$

を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

第 6 問

2020個の玉があり、1から2020まで順に1つずつ数字を記入して箱に入れる。どの玉を取り出すかは同様に確からしいものとする。

- (1) 箱から無作為に2個の玉を取り出すとき、それらの番号の和が5で割り切れる確率を求めよ。
- (2) 箱から無作為に2個の玉を取り出すとき、それらの番号の平方の和が5で割り切れる確率を求めよ。
- (3) 箱から無作為に2個の玉を取り出し、その2個の玉を戻すことなく、さらに箱から2個の玉を無作為に取り出す。最初の2個の玉の番号の和が5で割り切れ、2回目の2個の玉の番号の平方の和が5で割り切れる確率を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)