２０２１年　冬の陣　問題

数　学（理系）

（配点 120 点）

令和 3 年 2 月 1 日　150 分

注意・免責事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせなさい。
3. 解答には，必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
4. **解答用紙の指定欄に，受験番号，氏名を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。**
5. **問題は全部で 6 問あります。解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。**
6. **解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。**
7. この問題冊子の余白は，計算用に使用してもよいが，どのページも切り離してはいけません。
8. 解答用紙は，持ち帰ってはいけません。
9. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。
10. 本模擬試験問題は，いわゆる難関大学の前期入学試験問題（理系数学）の難度，及び品質に概ね準じるよう作成されていますが，受験者本人の正確な学力を測るためのものではなく，また同時に受験者の学力向上を確約するものではありません。

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

第　1　問

$\angle A = 30^\circ$ であるような三角形 ABC の頂点 A，B，C のそれぞれの対辺の長さを a，b，c とするとき，$\dfrac{a}{b+c}$ の最小値を求めよ。

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

第　2　問

数列 $\{2^{n-1}\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ の各項を十進法で表すとき，最初の n 項のうち最高位の数が 1 であるものの個数を a_n とする。

(1) a_{14} を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ。

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

第　3　問

目の出方が同様に確からしいサイコロを 6 回振り，出た目の数字を正 6 角形 ABCDEF の頂点に A から順に時計回りに書き込んでいく。さらに，向かい合う頂点に書き込まれた数字が等しい場合はそのどちらか一方を消去する。このようにして最後に残った数の総和を S とする。ただし正 6 角形 ABCDEF の各頂点は区別できるものとする。

例えば，出た目が順に 1，2，4，5，4，3 の場合は $S=19$ であり，1，3，5，4，3，4 の場合は向かい合う頂点 B，E に 3 が書き込まれているため，一方が消去されて $S=17$ となる。また，出た目が順に 1，1，1，1，1，1 の場合は 3 つの 1 が消去されて $S=3$ となる。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 数字が 1 つも消去されないような目の出方のうち，奇数の目が 1 回だけ出る場合，および，奇数の目が 3 回だけ出る場合はそれぞれ何通りあるか。

(2) 数字が 1 つだけ消去されるような目の出方のうち，S が奇数となる場合は何通りあるか。

(3) S が奇数となる確率を求めよ。

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

第　4　問

k を正の実数とする。1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC に対して，OB の中点を M，OC を $k:1$ に内分する点を P とし，3 点 A，M，P を通る平面と点 O の距離を d とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{k\to 0}\frac{d}{k^p}$ が 0 でない実数の定数となるような有理数 p，および，そのときの極限値を求めよ。

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

第　5　問

α，β，γ はいずれも 0 でない複素数とする。

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が正の実数であることは，等式 $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ が成り立つことの必要十分条件であることを示せ。

(2) 等式 $|\alpha+\beta+\gamma|=|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$ が成り立つとき，α，β，γ は複素平面上において原点を始点とする共通の半直線上に存在することを示せ。

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

第　6　問

xyz 座標空間を考える。yz 平面上の放物線 $C_1 : z = y^2 - 1$ の頂点が xz 平面上の放物線 $C_2 : z = x^2 - 1$ 上を動くように C_1 を平行移動させるとき，C_1 が通過してできる曲面を S とする。曲面 S と平面 $P : z = y$ で囲まれる部分の体積を求めよ。

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)

計　算　用　紙

(切り離さないで用いよ。)